

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ СТРУКТУРЫ СОСУДИСТОГО РУСЛА ТЕЛА ЧЕЛОВЕКА (ОБЗОР ЛИТЕРАТУРЫ)

Аннотация.

Целью работы явился сравнительный анализ и систематизация имеющихся в литературе сведений о математическом моделировании структуры сосудистого русла человека. Был проведен анализ 51 издания среди публикаций за последние 10 лет.

Наряду с гидродинамическим моделированием сердечно-сосудистой системы существует и структурное моделирование, что исследует как строение различных тканей и органов, так и принцип построения сосудистого русла. Модели структуры тканей различаются в первую очередь точностью и производительностью, в то время как подходы к построению иерархической структуры сосудистого русла могут различаться на фундаментальном уровне. Описанные подходы структурного моделирования постоянно развиваются как путем улучшения старых моделей и разработкой новых, так и за счет увеличения доступных вычислительных мощностей. Результаты анализа свидетельствуют о необходимости проведения дальнейших разработок в данной области и создания единой универсальной теории.

Ключевые слова: структурное моделирование, сердечно-сосудистая система, гемодинамика.

A. V. Dmitriev, Ya. A. Lysykh, O. K. Zenin

MATHEMATICAL MODELS OF THE VASCULAR BED STRUCTURE OF THE HUMAN BODY (LITERATURE REVIEW)

Abstract.

Background. The aim of the work is to compare and systematize information available in the literature on mathematical modeling of the structure of the human vascular bed. 51 literary sources of the last decade were analyzed.

Along with the hydrodynamic modeling of the cardiovascular system, there is also structural modeling, which explores both the structural structure of various tissues and organs and the principle of the construction of the vascular bed. Structure models differ primarily in the accuracy and performance associated with the presentation of materials, while approaches to constructing the hierarchical structure of the vascular bed may differ at a fundamental level. The described approaches of structural modeling are constantly evolving both by improving the old models and developing new ones, and by increasing the available computing power. The results of the analysis indicate the need for further development in this area and the creation of a unified universal theory.

Keywords: structural modeling, cardiovascular system, hemodynamics.

Введение

В связи с ростом количества сердечно-сосудистых заболеваний большую перспективу приобрели исследования в области математического моделирования сердечно-сосудистой системы. Такие исследования позволят предсказывать развитие различных заболеваний (например атеросклероза), перенести эксперименты *in silico* при разработке лекарств, а также оценивать эффективность различных методов лечения, таких как протезирование клапанов сердца, ангиопластика и др. Сегодня можно выделить два направления моделирования системы кровотока – гемодинамическое и структурное. Первое рассматривает движение крови в сердечно-сосудистой системе и ее взаимодействие с окружающими тканями как жидкости, второе же сосредоточено на рассмотрении принципов строения сосудистого русла в целом или его отдельных участков. Эти два направления часто дополняют друг друга, однако могут быть самостоятельными. В данной статье рассмотрены методы и способы структурного моделирования сердечно-сосудистой системы известные в настоящее время. Был проведен анализ 51 издания среди публикаций за последние 10 лет.

Структурное моделирование как моделирование строения различных частей сердечно-сосудистой системы можно разделить на направления – дискретное и сплошной среды [1]. Дискретное направление основано на обработке каждой частицы отдельно, оно дает возможность моделировать твердое вещество как неоднородное для обнаружения дефектов, которые могут возникнуть лишь на ограниченной области. Очевидно, что такие возможности сопряжены с повышенными требованиями к вычислительным мощностям, а это приводит к использованию данного подхода только к небольшим вычислительным областям [2–4], в то время как подход сплошной среды применяется к обширным расчетным зонам [5–7]. Однако развитие цифровых технологий, увеличение их мощности и скорости обработки информации постепенно убирает различие в целевых областях между данными подходами.

Если говорить о предмете структурного моделирования, то в основном исследуются характеристики тканей органов и сосудов и их взаимодействие с кровью, однако существуют дискретные модели красных кровяных клеток для изучения влияния изменения их характеристик как естественных, так и паталогических на процессы в организме. Далее приведены примеры функций энергии напряжения для некоторых моделей материалов, используемых в структурном моделировании и их описание.

1. Модель нео-Нюокена (простая гиперэластичность):

$$W = \frac{\mu}{2}(I_1 - 3) - \mu \ln J + \frac{\lambda}{2}(\ln J)^2.$$

Эта модель и линейная эластичность дают похожие профили деформации при небольших напряжениях. При больших напряжениях модель нео-Нюокена дает гораздо лучшее описание деформации и применима для напряжений вплоть до 20 % [8]. Также сердечно-сосудистые ткани считаются несжимаемыми ($J = 1$), что упрощает функцию до одного слагаемого.

2. Анизотропная модель венечной артерии на основе экспоненциальной функции Фанга:

$$W = \frac{\mu}{2}(I_1 - 3) + \frac{k_1}{k_2} \left(\exp \left(k_2 \left[(1 - \rho)(I_1 - 3)^2 + \rho(I_4 - 1)^2 \right] \right) - 1 \right).$$

Данная модель реализована в [9] как расширение предыдущей модели многослойной артериальной стенки венечного сосуда сердца [10]. Модель включает в себя экспоненциальное изотропное слагаемое, предложенное Фангом [11], и анизотропное слагаемое, связанное с I_4 , что зависит от угла между направлением структуры волокон и периферическим направлением напряжения.

3. Модель красных кровяных клеток:

$$W = \frac{a}{4} \left(\frac{1}{2} I_1^2 + I_1 - I_2 \right) + \frac{b}{8} I_2^2.$$

В статье [12] разработана 2D-модель сохраненного энергетического потенциала. Первое слагаемое определяет обычно малое напряжение деформации, в то время как второе слагаемое представляет собой зависящее от изменения площади изотропное напряжение.

Достоинством модели, использующей приближение сплошной среды, является использование надежных уравнений механики сплошной среды, решаемых не менее надежными численными методами. В первую очередь для структурного моделирования это метод конечных элементов (FE method), позволяющий включать в расчет модель материала для учета особых характеристик и поведения объекта при внешней нагрузке. Данный метод применяется в моделях как жидкостной [13, 14], так и твердой [15] части кровеносной системы. Несмотря на удобство данного направления моделирования, его использование для представления локальных феноменов, таких как повреждение или разрыв тканей, требует использования нестандартных уравнений. Хотя и предпринимаются попытки устранения этого недостатка, например расширенный метод конечных элементов (X-FEM) [16] или погруженный метод конечных элементов [17], но дискретное моделирование продолжает быть более эффективным для локальных случаев, представляя естественное развитие таких процессов.

Дискретные методы моделирования опираются на набор точек, образующих 2D- или 3D-структуру, представляющую изучаемую поверхность или объем. Для биологических тканей данные структуры имеют треугольное расположение узлов, так как оно является наиболее репрезентативным [18]. Частицы внутри области соединяются связями, меняя соотношения нагрузки и деформации, для которых можно моделировать свойства материала объекта. Для воспроизведения сопротивления деформации могут быть созданы дополнительные связи между гранями, образованными тремя частицами. Также есть возможность указания силы контакта между несоединенными частицами, что позволяет моделировать взаимодействия между отдельными твердыми телами, например такими, как створки сердечного клапана.

Благодаря моделированию отдельных частиц подобные модели могут учесть малые дефекты системы гораздо лучше, чем модели сплошной среды.

Однако из-за того, что даже малейшие объекты (например красные кровяные тельца) состоят из большого количества частиц, дискретные методы имеют высокие требования к вычислительным мощностям, что накладывает ограничение на их эффективное использование где-либо, кроме моделей самых маленьких объектов.

Одна из основных моделей, используемая для построения иерархии структуры кровеносной системы, – модель бинарных деревьев. Данная модель используется в широком спектре задач – русла кровеносных и бронхиальных систем, корневых систем и крон растений, русла рек и других системах, обеспечивающих приток/отток веществ в распределенной в пространстве системе [19]. Подобное представление при определенных геометрических соотношениях является собой оптимальные трубопроводы, обеспечивающие минимальный расход энергии на транспортировку, что есть характеристика оптимальных систем [20, 21]. И так как все в природе стремится к оптимальности, данный алгоритм может достаточно точно представлять кровяное русло как различных внутренних органов, так и всего организма в целом. Данная модель иерархии структуры часто используется совместно с гидродинамическим моделированием, позволяя рассматривать течение крови в двумерной или трехмерной задаче на реалистичной геометрии. Кровеносная система как бинарное дерево рассмотрена в [22–37].

При построении геометрии в подобных моделях обычно используют установленные зависимости между диаметрами, углами разветвлений и длинами сегментов сосудов [22]. Для диаметров сегментов используется закон Мюррея:

$$d_0^\gamma = d_1^\gamma + d_2^\gamma,$$

где d_0 – диаметр родительского сосуда; $d_{1,2}$ – диаметры дочерних сосудов; $\gamma \approx 3$ ($\gamma = 2,55 - 3,02$ и $\gamma = 2,76 - 3,02$ для артериальных и венозных русел, $\gamma = 2,62 - 2,91$ для бронхиального дерева) [38].

Для углов ветвления выполняются соотношения Розена [39]:

$$\alpha_1 = \arccos \left(\frac{\left((1 - \xi^2) \frac{4}{3} + 1 - \xi^4 \right)}{2 \left(1 + \xi^3 \right) \frac{2}{3}} \right), \quad \alpha_2 = \arccos \left(\frac{\left((1 - \xi^2) \frac{4}{3} \xi^4 - 1 \right)}{2 \xi^2 \left(1 + \xi^3 \right) \frac{2}{3}} \right),$$

где $\xi = \min \{d_1, d_2\} / \max \{d_1, d_2\}$ – коэффициент асимметрии бифуркации.

Для длин сегментов артерий выполняется аллометрический принцип [40]:

$$L_j = \alpha d_j^\beta,$$

где $\alpha \in [2,6; 7,59]$, $\beta \in [0,84; 1,16]$. Для внутриорганных русел существуют аппроксимации зависимостей $L_j(d_j)$ полиномами и другими функциями, специфическими для разных органов [41].

Широко распространенной альтернативой модели бинарных деревьев является электрическая модель сердечно-сосудистой системы, основанная на аналогии между электрическими характеристиками и гидродинамическими свойствами сосудов. Данный подход обычно используется для рассмотрения всей системы кровообращения в целом или ее крупных частей, так как позволяет смоделировать, пусть и сильно упрощенно, взаимодействие как отдельных частей сердечно-сосудистой системы между собой, так и общую картину качества работы сердечно-сосудистой системы. Различные вариации электрической модели представлены в работах [42–51].

Для представления кровеносной системы как электрической ее характеристики и части переводятся в аналогичные элементы и характеристики электрических систем. Обычно каждая артерия представлена набором, состоящим из резистора (представляющим сопротивление), конденсатором (моделирующим расширяемость сосуда) и индуктором (реализующим инерцию крови). Сердце либо определяется как источник переменного тока, производящий напряжение, которое представляет собой давление крови, либо также представляется в виде совокупности электрических элементов, что моделирует работу предсердий и желудочков сердца. Характеристики системы кровообращения, такие как давление, поток, объем, сопротивление и расширяемость, заменяются соответственно на напряжение, силу тока, заряд, сопротивление и емкость для электрической системы.

Заключение

Говоря о структурном моделировании сердечно-сосудистой системы, в зависимости от контекста имеют в виду модели либо строения и материалов тканей и органов, либо иерархической структуры сосудов. Для моделей тканей и органов существует много различных подходов, которые можно разделить на две группы – дискретные модели и модели сплошной среды. И если первая группа оперирует структурами, состоящими из отдельных частиц со своими свойствами, что дает высокую точность при расчете различных состояний, но и накладывает высокие требования к вычислительным мощностям, то вторая группа использует осредненные характеристики материалов, имея меньшую точность, чем дискретный подход, но при этом использует гораздо меньшие вычислительные мощности. Если говорить об иерархическом моделировании, то тут также существует два основных подхода – модель бинарных деревьев и электрическая модель. Первый подход представляет собой построение сосудистой структуры при помощи установленных математических зависимостей в виде разветвляющихся деревьев и может использоваться как самостоятельно, например для изучения оптимальности строения кровеносной системы, так и в сочетании с гидродинамическим моделированием. Электрическая же модель сочетает в себе как иерархическую структуру сердечно-сосудистой системы в виде электрической цепи, так и расчетную модель различных параметров кровотока с использованием их электрических аналогов. Описанные подходы структурного моделирования постоянно развиваются как улучшением старых моделей и разработкой новых, так и за счет увеличения доступных вычислительных мощностей.

Библиографический список

1. Structural modelling of the cardiovascular system / B. Owen [et al.] // *Biomechanics and Modeling in Mechanobiology*. – 2018. – Vol. 17, № 5. – P. 1217–1242.
2. **Fedosov, D. A.** A multiscale red blood cell model with accurate mechanics, rheology, and dynamics / D. A. Fedosov, B. Caswell, G. E. Karniadakis // *Biophysical Journal*. – 2010. – Vol. 98, № 10. – P. 2215–2225.
3. Spectrin-level modeling of the cytoskeleton and optical tweezers stretching of the erythrocyte / J. Li [et al.] // *Biophysical Journal*. – 2005. – Vol. 88. – P. 3707–3719.
4. **Nakamura, M.** Spring-network-based model of a red blood cell for simulating mesoscopic blood flow / M. Nakamura, S. Bessho, S. Wada // *International Journal for Numerical Methods in Biomedical Engineering*. – 2013. – Vol. 29, № 1. – P. 114–128.
5. Blunt trauma and acute aortic syndrome: a three-layer finite-element model of the aortic wall / A. R. Zhao [et al.] // *European Journal of Cardio-Thoracic Surgery*. – 2008. – V. 34, № 3. – P. 623–629.
6. A coupled momentum method for modeling blood flow in three-dimensional deformable arteries / C. A. Figueroa [et al.] // *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. – 2006. – Vol. 195, № 41–43. – P. 5685–5706.
7. Fluidstructure interaction simulation of aortic blood flow / P. Crosetto [et al.] // *Computers & Fluids*. – 2011. – Vol. 43, № 1. – P. 46–57.
8. **Gent, A. N.** Engineering with rubber: how to design rubber components / A. N. Gent. – 3rd edition. – Munich : Hanser Publishers, 2012. – 451 p.
9. Determination of layer-specific mechanical properties of human coronary arteries with nonatherosclerotic intimal thickening and related constitutive modeling / A. Gerhard [et al.] // *American Journal of Physiology: Heart and Circulatory Physiology*. – 2005. – Vol. 289, № 5. – P. 2048–2058.
10. **Gerhard, A. H.** A New Constitutive Framework for Arterial Wall Mechanics and a Comparative Study of Material Models / A. H. Gerhard, C. G. Thomas, W. O. Ray // *Journal of elasticity and the physical science of solids*. – 2000. – Vol. 61, № 1–3. – P. 1–48.
11. **Fung, Y. C.** Elasticity of soft tissue in simple elongation / Y. C. Fung // *American Journal of Physiology*. – 1967. – Vol. 213, № 6. – P. 1532–1544.
12. Strain energy function of red blood cell membranes / R. Skalak [et al.] // *Biophysical Journal*. – 1973. – Vol. 13, № 3. – P. 245–264.
13. **Taylor, C. A.** Finite element modeling of three-dimensional pulsatile flow in the abdominal aorta: relevance to atherosclerosis / C. A. Taylor, T. J. Hughes, C. K. Zarins // *Annals of Biomedical Engineering*. – 1998. – Vol. 26, № 6. – P. 975–987.
14. **Oshima, M.** Finite element simulation of blood flow in the cerebral artery / M. Oshima, R. Torii, T. Kobayashi // *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. – 2001. – Vol. 191, № 6-7. – P. 661–671.
15. **Kim, H. J.** Incorporating autoregulatory mechanisms of the cardiovascular system in three-dimensional finite element models of arterial blood flow / H. J. Kim, K. E. Jansen, C. A. Taylor // *Annals of Biomedical Engineering*. – 2010. – Vol. 38, № 7. – P. 2314–2330.
16. **Abdelaziz, Y.** A survey of the extended finite element / Y. Abdelaziz, A. Hamouine // *Computers & Structures*. – 2008. – Vol 86, № 11–12. – P. 1141–1151.
17. Immersed finite element method and its applications to biological systems / W. K. Liu [et al.] // *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. – 2006. – Vol. 195, № 13–16. – P. 1722–1749.
18. **Abraham, F. F.** Diffraction from polymerized membranes: flat vs crumpled / F. F. Abraham, M. Goulian // *Europhysics Letters*. – 1992. – Vol. 19, № 4. – P. 293–296.

19. **Bejan, A.** Shape and Structure: from Engineering to Nature / A. Bejan. – Cambridge : Univ. Press, 2000. – 210 p.
20. **Черноусько, Ф. Л.** Оптимальная структура ветвящихся трубопроводов / Ф. Л. Черноусько // Прикладная математика и механика. – 1977. – Т. 41, № 2. – С. 376–383.
21. **La Barbera, M.** Principles of design of fluid transport systems in zoology / M. La Barbera // Science. – 1990. – Vol. 249. – P. 992–1000.
22. **Балабанов, В. А.** Математическое моделирование и 3D-визуализация бинарных деревьев с минимумом самопересечений / В. А. Балабанов, Н. Н. Кизилова // Вісник Харківського національного університету імені В. Н. Каразіна. – 2017. – С. 5–17.
23. **Балабанов, В. О.** Математичне моделювання артеріальних систем як бінарних дерев, які заповнюють об'єм простору / В. О. Балабанов, Н. М. Кізілова // Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Сер.: Фізико-математичні науки. Спецвипуск. – 2015. – С. 27–32.
24. **Балабанов, В. А.** Новый алгоритм построения оптимальных транспортных систем, заполняющих заданную область / В. А. Балабанов, Н. Н. Кизилова // Механика. Исследования и инновации. – 2016. – Вып. 9. – С. 18–26.
25. 3D Imaging of vascular networks for biophysical modeling of perfusion distribution within the heart / P. H. M. Jeroen [et al.] // Journal of Biomechanics. – 2013. – Vol. 46, № 2. – P. 229–239.
26. Numerical Simulation and Experimental Validation of Blood Flow in Arteries with Structured-Tree Outflow Conditions / M. Olufsen [et al.] // Annals of Biomedical Engineering. – 2000. – Vol. 28, № 11. – P. 1281–1299
27. Limited Bifurcation Asymmetry in Coronary Arterial Tree Models Generated by Constrained Constructive Optimization / W. Schreiner, F. Neumann, M. Neumann, R. Karch, A. End, S. M. Roedler // Journal of general physiology. – 1997. – Vol. 109, № 2. – P. 129–140.
28. A three-dimensional model for arterial tree representation, generated by constrained constructive optimization / R. Karch [et al.] // Computers in Biology and Medicine. – 1999. – Vol. 29. – P. 19–38.
29. Математические модели циклической части русла брыжеечных артерий толстой кишки человека / Ю. В. Довгялло [та інш.] // Питання експериментальної та клінічної медицини, Збірник статей. – 2013. – Т. 2, Вип. 17. – С. 164–169.
30. **Perdikaris, P.** An Effective Fractal-Tree Closure Model for Simulating Blood Flow in Large Arterial Networks / P. Perdikaris, L. Grinberg, G. E. Karniadakis // Annals of Biomedical Engineering. – 2015. – Vol. 43, № 6. – P. 1432–1442.
31. Branching patterns for arterioles and venules of the human cerebral cortex / F. Cassot [et al.] // Brain Research. – 2010. – Vol. 1313. – P. 62–78.
32. **Comerford, A.** Structured Tree Impedance Outflow Boundary Conditions for 3D Lung Simulations / A. Comerford, C. Förster, W. A. Wall // ASME. Journal of Biomechanical Engineering. – 2010. – Vol. 132, № 8. – URL: <https://biomechanical.asmedigitalcollection.asme.org/article.aspx?articleid=1426383> (дата обращения: 20.12.2018).
33. **Du, T.** Outflow Boundary Conditions for Blood Flow in Arterial Trees / T. Du, D. Hu, D. Cai // PLoS One. – 2015. – Vol. 10, № 5. – URL: <https://doi.org/10.1371/journal.pone.0128597> (дата обращения: 20.12.2018).
34. Obstructions in Vascular Networks: Relation Between Network Morphology and Blood Supply / Rojas A. M. Torres [et al.] // PLoS One. – 2015. – Vol. 10, № 6. – URL: <https://journals.plos.org/plosone/article?id=10.1371/journal.pone.0128111> (дата обращения: 20.12.2018)
35. A Principal Component Analysis for Trees / B. Aydin [et al.] // eprint arXiv. – 2008. – URL: <https://arxiv.org/abs/0810.0944> (дата обращения: 21.12.2018).

36. Validation of a one-dimensional model of the systemic arterial tree / P. Reymond [et al.] // *American Journal of Physiology | Heart and Circulatory Physiology*. – 2009. – Vol. 297, № 1. – P. 208–222
37. The Multifractal Structure of Arterial Trees / J. Grasman [et al.] // *J Theor Biol*. – 2003. – Vol. 220. – P. 75–82.
38. Scaling Laws for Branching Vessels of Human Cerebral Cortex / F. Cassot [et al.] // *Microcirculation*. – 2009. – Vol. 16. – P. 331–344.
39. **Kizilova, N. N.** Computational approach to optimal transport network construction in biomechanics / N. N. Kizilova // *Lecture Notes in Computer Sci.* – 2004. – Vol. 3044. – P. 476–485.
40. **Розен, Р.** Принцип оптимальности в биологии / Р. Розен. – Москва : Мир, 1968. – 212 с.
41. Structure-Function Relationships in the Pulmonary Arterial Tree / C. A. Dawson, G. S. Krenz, K. L. Karau et al. // *J. Appl. Physiol.* – 1999. – Vol. 86. – P. 569–583.
42. **Зенин, О. К.** Артериальная система человека в цифрах и формулах / О. К. Зенин и др. – Донецк : Донбасс, 2002. – 196 с.
43. **Hassani, K.** Simulation of the cardiovascular system using equivalent electronic system / K. Hassani, M. Navidbakhsh, M. Rostami // *Biomedical papers*. – 2001. – Vol. 150, № 1. – P. 105–112.
44. **Mossa, H. A. L.** Engineering Modeling of Human Cardiovascular System / H. A. L. Mossa // *The 1st Regional Conference of Eng Sci NUCEJ Spatial Issue*. – 2008. – Vol. 11, № 2. – P. 307–314.
45. **Mirzaee, M.** Modeling Vessels in Human Cardiovascular System and Calculating Pressure Wastes Using Lumped Method / M. Mirzaee, O. Ghasemalizadeh, B. Firoozabadi // *The Internet Journal of Bioengineering*. – 2008. – Vol. 3, № 2. – URL: <http://ispub.com/IJBE/3/2/6880> (дата обращения: 24.12.2018).
46. **Naik, K.** Mathematical Modeling of Human Cardiovascular System: A Lumped Parameter Approach and Simulation / K. Naik, P. H. Bhathawala // *International Journal of Mathematical and Computational Sciences*. – 2017. – Vol. 11, № 1. – P. 73–84.
47. **Tsalikakis, D. G.** Simulation of Cardiovascular Diseases Using Electronic Circuits / D. G. Tsalikakis, D. I. Fotiadis, D. Sideris // *Computers in Cardiology*. – 2003. – Vol. 30. – P. 445–448.
48. **Arathi, S.** Mathematical modeling of cardiac blood flow in humans / S. Arathi, B. Ananda // *International journal of advances in scientific research and engineering*. – 2016. – Vol. 2, № 11. – P. 8–15.
49. A lumped parameter model of cardiovascular system for diagnostic studies / S. V. Frolov [et al.] // *Journal of Mechanics in Medicine and Biology*. – 2017. – Vol. 17, № 03. – URL: <https://www.worldscientific.com/doi/abs/10.1142/S0219519417500567> (дата обращения: 24.12.2018).
50. Cardiovascular Mathematical Model of Graded Head-Up Tilt / E. Lim [et al.] // *PLoS ONE*. – 2013. – Vol. 8, № 10. – URL: <https://journals.plos.org/plosone/article?id=10.1371/journal.pone.0077357> (дата обращения: 24.12.2018).
51. A patient-specific lumped parameter model of coronary circulation / Z. Duanmu [et al.] // *Scientific Reports*. – 2018. – Vol. 8. – URL: <https://www.nature.com/articles/s41598-018-19164-w> (дата обращения: 25.12.2018).

References

1. Owen B. et al. *Biomechanics and Modeling in Mechanobiology*. 2018, vol. 17, no. 5, pp. 1217–1242.
2. Fedosov D. A., Caswell B., Karniadakis G. E. *Biophysical Journal*. 2010, vol. 98, no. 10, pp. 2215–2225.
3. Li J. et al. *Biophysical Journal*. 2005, vol. 88, pp. 3707–3719.

4. Nakamura M., Bessho S., Wada S. *International Journal for Numerical Methods in Biomedical Engineering*. 2013, vol. 29, no. 1, pp. 114–128.
5. Zhao A. R. et al. *European Journal of Cardio-Thoracic Surgery*. 2008, vol. 34, no. 3, pp. 623–629.
6. Figueroa C. A. et al. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. 2006, vol. 195, no. 41–43, pp. 5685–5706.
7. Crosetto P. et al. *Computers & Fluids*. 2011, vol. 43, no. 1, pp. 46–57.
8. Gent A. N. *Engineering with rubber: how to design rubber components*. 3rd edition. Munich: Hanser Publishers, 2012, 451 p.
9. Gerhard A. et al. *American Journal of Physiology: Heart and Circulatory Physiology*. 2005, vol. 289, no. 5, pp. 2048–2058.
10. Gerhard A. H., Thomas C. G., Ray W. O. *Journal of elasticity and the physical science of solids*. 2000, vol. 61, no. 1–3, pp. 1–48.
11. Fung Y. C. *American Journal of Physiology*. 1967, vol. 213, no. 6, pp. 1532–1544.
12. Skalak R. et al. *Biophysical Journal*. 1973, vol. 13, no. 3, pp. 245–264.
13. Taylor C. A., Hughes T. J., Zarins C. K. *Annals of Biomedical Engineering*. 1998, vol. 26, no. 6, pp. 975–987.
14. Oshima M., Torii R., Kobayashi T. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. 2001, vol. 191, no. 6-7, pp. 661–671.
15. Kim H. J., Jansen K. E., Taylor C. A. *Annals of Biomedical Engineering*. 2010, vol. 38, no. 7, pp. 2314–2330.
16. Abdelaziz Y., Hamouine A. *Computers & Structures*. 2008, vol. 86, no. 11–12, pp. 1141–1151.
17. Liu W. K. et al. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. 2006, vol. 195, no. 13–16, pp. 1722–1749.
18. Abraham F. F., Goulian M. *Europhysics Letters*. 1992, vol. 19, no. 4, pp. 293–296.
19. Bejan A. *Shape and Structure: from Engineering to Nature*. Cambridge: Univ. Press, 2000, 210 p.
20. Chernous'ko F. L. *Prikladnaya matematika i mekhanika* [Applied mathematics and mechanics]. 1977, vol. 41, no. 2, pp. 376–383. [In Russian]
21. La Barbera M. *Science*. 1990, vol. 249, pp. 992–1000.
22. Balabanov V. A., Kizilova N. N. *Visnik Kharkivs'kogo natsional'nogo universitetu imeni V. N. Karazina* [Bulletin of Kharkov National University named after V.N. Karazin]. 2017, pp. 5–17.
23. Balabanov V. O., Kizilova N. M. *Visnik Kiivs'kogo natsional'nogo universitetu imeni Tarasa Shevchenka. Ser.: Fiziko-matematichni nauki. Spetsvipusk* [Bulletin of Kyev National University named after Taras Shevchenko. Series: Physical and mathematical sciences. Special issue]. 2015, pp. 27–32.
24. Balabanov V. A., Kizilova N. N. *Mekhanika. Issledovaniya i innovatsii* [Mechanics. Research and innovations]. 2016, iss. 9, pp. 18–26. [In Russian]
25. Jeroen P. H. M. et al. *Journal of Biomechanics*. 2013, vol. 46, no. 2, pp. 229–239.
26. Olufsen M. et al. *Annals of Biomedical Engineering*. 2000, vol. 28, no. 11, pp. 1281–1299
27. Schreiner W., Neumann F., Neumann M., Karch R., End A., Roedler S. M. *Journal of general physiology*. 1997, vol. 109, no. 2, pp. 129–140.
28. Karch R. et al. *Computers in Biology and Medicine*. 1999, vol. 29, pp. 19–38.
29. Dovgyallo Yu. V. et al. *Pitannya eksperimental'noi ta klinichnoi meditsini, Zbirnik statey* [Issues of Experimental and Clinical Medicine, Collected Articles]. 2013, vol. 2, iss. 17, pp. 164–169.
30. Perdikaris P., Grinberg L., Karniadakis G. E. *Annals of Biomedical Engineering*. 2015, vol. 43, no. 6, pp. 1432–1442.
31. Cassot F. et al. *Brain Research*. 2010, vol. 1313, pp. 62–78.

32. Comerford A., Förster C., Wall W. A. *ASME. Journal of Biomechanical Engineering*. 2010, vol. 132, no. 8. Available at: <https://biomechanical.asmedigitalcollection.asme.org/article.aspx?articleid=1426383> (accessed Dec. 20, 2018).
33. Du T., Hu D., Cai D. *PLoS One*. 2015, vol. 10, no. 5. Available at: <https://doi.org/10.1371/journal.pone.0128597> (accessed Dec. 20, 2018).
34. Rojas A. M. Torres et al. *PLoS One*. 2015, vol. 10, no. 6. Available at: <https://journals.plos.org/plosone/article?id=10.1371/journal.pone.0128111> (accessed Dec. 20, 2018).
35. Aydin B. et al. *eprint arXiv*. 2008. Available at: <https://arxiv.org/abs/0810.0944> (accessed Dec. 21, 2018).
36. Reymond P. et al. *American Journal of Physiology | Hearth and Circulatory Physiology*. 2009, vol. 297, no. 1, pp. 208–222.
37. Grasman J. et al. *J Theor Biol*. 2003, vol. 220, pp. 75–82.
38. Cassot F. et al. *Microcirculation*. 2009, vol. 16, pp. 331–344.
39. Kizilova N. N. *Lecture Notes in Computer Sci*. 2004, vol. 3044, pp. 476–485.
40. Rozen R. *Printsip optimal'nosti v biologii* [The principle of optimality in biology]. Moscow: Mir, 1968, 212 p. [In Russian]
41. Dawson C. A., Krenz G. S., Karau K. L. et al. *J. Appl. Physiol*. 1999, vol. 86, pp. 569–583.
42. Zenin O. K. et al. *Arterial'naya sistema cheloveka v tsifrah i formulakh* [Human arterial system in figures and formulas]. Donetsk: Donbass, 2002, 196 p. [In Russian]
43. Hassani K., Navidbakhsh M., Rostami M. *Biomedical papers*. 2001, vol. 150, no. 1, pp. 105–112.
44. Mossa H. A. L. *The 1st Regional Conference of Eng Sci NUCEJ Spatial Issue*. 2008, vol. 11, no. 2, pp. 307–314.
45. Mirzaee M., Ghasemalizadeh O., Firoozabadi B. *The Internet Journal of Bioengineering*. 2008, vol. 3, no. 2. Available at: <http://ispub.com/IJBE/3/2/6880> (accessed Dec. 24, 2018).
46. Naik K., Bhathawala P. H. *International Journal of Mathematical and Computational Sciences*. 2017, vol. 11, no. 1, pp. 73–84.
47. Tsalikakis D. G., Fotiadis D. I., Sideris D. *Computers in Cardiology*. 2003, vol. 30, pp. 445–448.
48. Arathi S., Ananda B. *International journal of advances in scientific research and engineering*. 2016, vol. 2, no. 11, pp. 8–15.
49. Frolov S. V. et al. *Journal of Mechanics in Medicine and Biology*. 2017, vol. 17, no. 03. Available at: <https://www.worldscientific.com/doi/abs/10.1142/S0219519417500567> (accessed Dec. 24, 2018).
50. Lim E. et al. *PLoS ONE*. 2013, vol. 8, no. 10. Available at: <https://journals.plos.org/plosone/article?id=10.1371/journal.pone.0077357> (accessed Dec. 24, 2018).
51. Duanmu Z. et al. *Scientific Reports*. 2018, vol. 8. Available at: <https://www.nature.com/articles/s41598-018-19164-w> (accessed Dec. 25, 2018).

Дмитриев Андрей Викторович

кандидат медицинских наук,
заведующий отделением
рентгенэндоваскулярной хирургии,
Институт неотложной хирургии
(Украина, г. Донецк, пр. Ленинский, 47)

E-mail: dmitriev72@list.ru

Dmitriev Andrey Viktorovich

Candidate of medical sciences, head
of x-ray endovascular surgery unit,
Institute of Emergency Surgery
(47 Leninsky avenue, Donetsk, Ukraine)

Лысых Ярослав Артурович

соискатель, заведующий учебной лабораторией, физико-технический факультет, Донецкий национальный университет (Украина, г. Донецк, ул. Университетская, 24)

E-mail: shadowinthe flames@gmail.com

Lysykh Yaroslav Arturovich

Applicant, head of laboratory, Faculty of Physics and Engineering, Donetsk National University (24 Universitetskaya street, Donetsk, Ukraine)

Зенин Олег Константинович

доктор медицинских наук, профессор, кафедра анатомии человека, Медицинский институт, Пензенский государственный университет (Россия, г. Пенза, ул. Красная, 40)

E-mail: zen.olegz@gmail.com

Zenin Oleg Konstantinovich

Doctor of medical sciences, professor, sub-department of human anatomy, Medical Institute, Penza State University (40 Krasnaya street, Penza, Russia)

Образец цитирования:

Дмитриев, А. В. Математические модели структуры сосудистого русла тела человека (обзор литературы) / А. В. Дмитриев, Я. А. Лысых, О. К. Зенин // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Медицинские науки. – 2019. – № 2 (50). – С. 78–88. – DOI 10.21685/2072-3032-2019-2-8.